226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Cadre : Soient $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

I Généralités sur les suites récurrentes

1) Définition et premières propriétés

Définition 1. On dit que (u_n) et une suite récurrente d'ordre k s'il existe une fonction $f : E^k \to E$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+k} = f(u_n, \dots, u_{n+k-1})$$

Proposition 2. *Soit (u_n) une suite récurrente d'ordre k. Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ et si $f$est continue en $(\ell, \dots, \ell)$, alors on a $\ell = f(\ell, \dots, \ell)$. Si $k = 1$, ℓ est un point fixe de f.*

Exemple 3. *Considérons la suite $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \mathbb{1}_{\{0\}}(u_n)$ pour $u_0 > 0$. On a alors $u_n \to 0$, mais $\frac{0}{2} + \mathbb{1}_{\{0\}}(0) = 1 \neq 0$.*

Remarque 4. *Soit (u_n) une suite récurrente d'ordre k. On se ramène à une suite récurrente d'ordre 1 en posant :*

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+k-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ f(u_n, \dots, u_{n+k-1}) \end{pmatrix} = F(U_n)$$

Mais cette suite est dans l'espace E^k, ce qui peut rendre l'étude de F plus délicate que celle de f.

Proposition 5. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle tel que $f(I) \subset I$, et $u_0 \in I$.*

(i) Si f est croissante, la suite (u_n) est monotone et son sens de monotonie est donné par le signe de $u_1 - u_0$.

(ii) Si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante, ainsi les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, et leur sens de monotonie est opposé.

Exemple 6. *Pour $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $u_{n+1} = sin(u_n)$, $u_n \to 0$.*

Exemple 7. *Pour $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2-\sqrt{u_n}}$, $u_n \to 1$.*

Proposition 8. *Soient $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in [0, 1]$ et $x_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.*

2) Suites récurrentes linéaires

Définition 9. On dit que la relation de récurrence est linéaire si f est une application linéaire. Si $E = \mathbb{R}$, alors f est une forme linéaire, donnée par un vecteur $(a_1, \dots, a_k)$. Le polynôme $X^k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i X^{k-i}$ est appelé polynôme caractéristique de la relation de récurrence.

Proposition 10. *Soit (u_n) une suite récurrente d'ordre k, de polynôme caractéristique P. On note $r_1, \dots, r_q$ ses racines et $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ leur multiplicité. Alors (u_n) est de la forme :*

$$u_n = \sum_{i=1}^{q} P_i(n) r_i^n \quad \text{avec} \quad P_i \in \mathbb{R}_{\alpha_i - 1}[X]$$

Exemple 11 (Fibonacci)**.** *On considère la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$ par $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Alors :*

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

3) Quelques exemples classiques

Définition 12. On dit que (u_n) est arithmétique (resp. géométrique) de raison $a \in E$ (resp. $a \in \mathbb{R}$) si $u_{n+1} = u_n + a$ (resp. $u_{n+1} = au_n$).

Proposition 13. *Si (u_n) est arithmétique (resp. géométrique) de raison $a \in \mathbb{R}$, alors $u_n = u_0 + na$ (resp. $u_n = a^n u_0$).*

Proposition 14. *(i) Une suite arithmétique converge si, et seulement si, elle est constante.*

(ii) Une suite géométrique converge si, et seulement si, $|a| < 1$.

(iii) Une suite géométrique est bornée si, et seulement si, $|a| \leqslant 1$.

Définition 15. On dit que (u_n) est arithmético-géométrique si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$. Si $a \neq 1$, la suite définie par $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$ est géometrique de raison a. On a dans ce cas $u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$, qui converge si , et seulement si $|a| < 1$.

Définition 16. On dit que (u_n) est homographique lorsqu'elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = h(u_n) \quad \text{avec} \quad h(x) = \frac{ax+b}{cx+d},\ ad - bc \neq 0$$

Proposition 17. *Soit (u_n) une suite homographique. Soient α et β les solutions de $h(x) = x \Leftrightarrow cx^2 - (a-d)x - b = 0$.*

(i) Si $\alpha \neq \beta$, la suite $\left(\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}\right)$ est géométrique de raison $\frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$.

(ii) Si $\alpha = \beta$, la suite $\left(\frac{1}{u_n - \beta}\right)$ est arithmétique de raison $\frac{c}{a - \beta c}$.

Exemple 18. *Si $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$ avec $u_0 = 1$, $u_n \to 0$.*

II Suites récurrentes et points fixes

1) Théorème de point fixe de Banach-Picard

Définition 19. Soient X un ensemble, $f : X \to X$ une application et $a \in X$. On dit que a est un point fixe de f si $f(x) = x$.

Théorème 20 (Banach-Picard)**.** *Soient (X, d) un espace métrique complet (non vide), et $F : X \to X$ une application k-contractante. Alors F admet un unique point fixe et toute suite définie par $u_0 \in X$ puis $u_{n+1} = F(u_n)$ converge vers ce point à une vitesse géométrique.*

Remarque 21. *Si F^p est contractante, on a le même résultat.*

Contre-exemple 22. *Si $X =]0,1[$ et $F : x \mapsto \frac{x}{2}$, F est contractante mais sans point fixe (X n'est pas complet).*

Contre-exemple 23. *Si $X = [0,1]$ et $F : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$, X est complet, F est contractante, mais sans point fixe ($F([0,1]) = [1, \sqrt{2}]$).*

Contre-exemple 24. *Si $X = \mathbb{R}$ et $F : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$, X est complet, F applique X dans lui-même, mais sans point fixe (F n'est pas contractante).*

Application 25. *On souhaite résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$ avec $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable. Posons $\varphi(x) = x - Cf(x)$ avec $C \neq 0$ une constante. Le problème revient alors à trouver les points fixes de φ. Supposons $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, et qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}^{+\star}$ tels que $m \leqslant f' \leqslant M$. Prendre $C = \frac{1}{M}$ permet alors à φ d'être contractante et d'envoyer $[a,b]$ dans $[a,b]$ qui est complet. Il existe donc un unique point fixe de φ, donc une unique solution de $f(x) = 0$, qui peut être approché par une suite récurrente définie par $x_0 \in [a,b]$ et $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.*

Application 26 (Cauchy-Lipschitz)**.** *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue et lipschitzienne en sa deuxième variable. Alors tout problème de Cauchy $y' = f(t,y)$ et $y(t_0) = x_0$ admet une unique solution maximale.*

2) Étude des points fixes dans le cas réel d'ordre 1

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ admettant un point fixe $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 27. (i) On dit que α est attractif, si $|f'(\alpha)| < 1$.

(ii) On dit que α est répulsif, si $|f'(\alpha)| > 1$.

Proposition 28. *(i) Si α est attractif, il existe un intervalle I autour de α tel que toute suite définie par $x_0 \in I$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ converge géométriquement vers ce point fixe.*

(ii) Si α est répulsif, il n'existe pas de suite non stationnaire définie par $x_0 \in I$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ qui converge vers ce point fixe.

Remarque 29. *Si $|f'(\alpha)| = 1$, on ne peut rien dire sur la nature du point fixe, comme le montrent les prochains exemples.*

Exemple 30. *Soit $f(x) = \sin x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a $\sin x < x$ pour $x > 0$. Toute suite définie par $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et strictement décroissante et minorée, donc convergente vers un point fixe de f, donc vers 0, qui est attractif.*

Exemple 31. *Soit $f(x) = \sinh x$ sur $\mathbb{R}^+$. On a $\sinh x > x$ pour $x > 0$. Toute suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}^{+\star}$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ diverge vers $+\infty$, et le point fixe est répulsif.*

III Méthodes itératives à un pas

1) Méthode de Newton

La méthode de Newton consiste à approcher une solution d'une équation $f(x) = 0$ en partant d'une approximation plus grossière. L'idée est de remplacer la courbe de f par sa tangente.

Théorème 32 (Méthode de Newton)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et $f' > 0$ sur $[a,b]$. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :*

$$x_0 \in [a,b] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

La fonction f admet un unique zéro $\alpha \in]a,b[$, et on a :

(i) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $x_0 \in I =]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge quadratiquement vers α, et il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |x_{n+1} - \alpha| \leqslant C|x_n - \alpha|^2$$

(ii) Si de plus $f'' > 0$ sur $[\alpha, b]$, alors, pour $x \in]\alpha, b]$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leqslant x_{n+1} - \alpha \leqslant C(x_n - \alpha)^2 \quad \textit{et} \quad x_{n+1} - \alpha \sim \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(x_n - \alpha)^2$$

2) Méthodes de gradient

Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. On suppose J différentiable. On cherche, s'il existe, un élément $u \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$J(u) = \inf_{v \in \mathbb{R}^n} J(v)$$

Pour cela, on utilise les méthodes de gradient. On considère la suite :

$$u_0 \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ u^{k+1} = u^k - \rho^k\, \nabla\, J(u^k)$$

Il existe plusieurs possibilités pour choisir les ρ^k, par exemple :

(i) Gradient à pas fixe : $\rho^k = \rho$ une constante positive fixée.

(ii) Gradient à pas optimal : ρ^k minimise $\rho \mapsto J\left(u^k - \rho\, \nabla\, J(u^k)\right)$.

Théorème 33. *Si J est α-convexe et différentiable, et que $\nabla\, J$ est L-lipschitzienne, alors la méthode de gradient à pas optimal converge vers l'unique minimum de J.*

Application 34. *Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. On considère la fonctionnelle quadratique $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$J(X) = \langle AX, X\rangle - \langle b, X\rangle + c$$

Cette fonctionnelle satisfait les conditions du théorème précédent. De plus, son minimum est atteint en $X_0 \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie $\nabla\, J(X_0) = AX - b = 0$. On a donc une méthode itérative pour approcher la solution de $AX = b$.

Développements

— Méthode de Newton (32) [Rou15]

— Algorithme de gradient à pas optimal (33) [Cia88]

Références

[Gou08] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses

[Rou15] F. Rouvière. *Petit Guide de Calcul Différentiel.* Cassini

[Dem06] J.-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.* EDP Sciences

[Cia88] P. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation.* Masson

Annexes

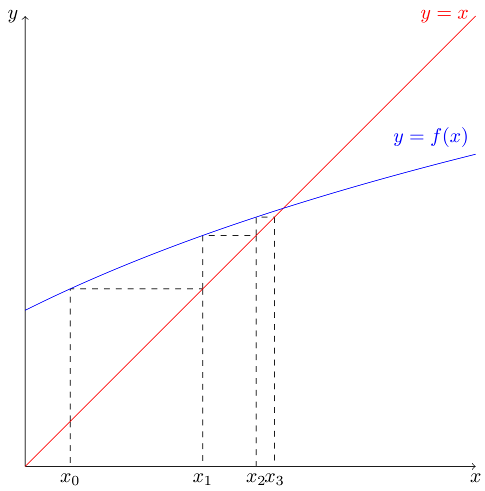

Figure 1 – Point fixe attractif

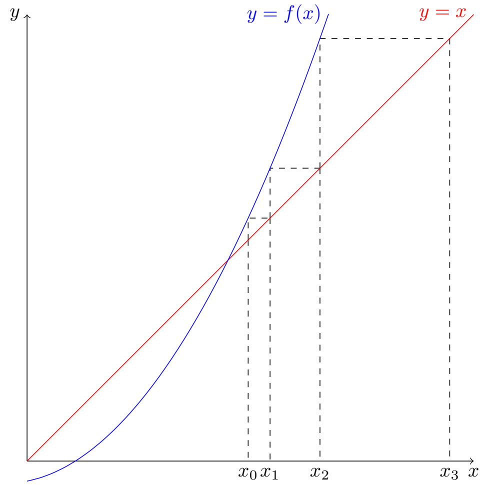

Figure 2 – Point fixe répulsif

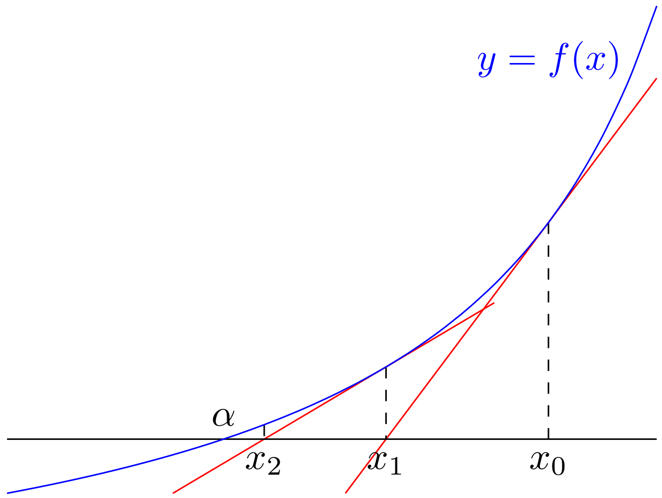

Figure 3 – Méthode de Newton